ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 heures

Notations

$\mathbb{R}^-$ est l'ensemble des nombres réels négatifs ou nuls. Soit n un nombre entier $\geqslant 1$, fixé pour tout le problème. L'ensemble des matrices à n lignes, n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{C}$ est noté $M_n(\mathbb{C})$. La matrice nulle et la matrice unité de $M_n(\mathbb{C})$ sont notées O_n et I_n. Si $M \in M_n(\mathbb{C})$, $Sp(M)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de M. On munit $M_n(\mathbb{C})$ de la norme :

$$\| M \| = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} | m_{ij} |^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{si} \quad M = ((m_{ij}))_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}.$$

Si E et F sont deux espaces vectoriels réels de dimensions finies, si une application $S : E \to F$ est différentiable, et si $x \in E$, on note dS_x la différentielle de S au point x, c'est-à-dire l'application linéaire de E dans F définie par :

$$dS_x(y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{S(x + \varepsilon y) - S(x)}{\varepsilon}.$$

Si $\dim E = \dim F$ et $x_0 \in E$, on considère l'algorithme de Newton pour S, à partir de x_0, dont la formule de récurrence est :

$$dS_{x_k}(x_{k+1} - x_k) = -S(x_k).$$

On dira que cette suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie si dS_{x_k} est inversible pour tout $k \in \mathbb{N}$; dans ce cas, cette suite est unique.

PREMIÈRE PARTIE

Question 1 : Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \notin \mathbb{R}^-$. Montrer qu'il existe un et un seul $y \in \mathbb{C}$ vérifiant $\operatorname{Re} y > 0$ et $y^2 = z$.

Ce nombre sera noté $\sqrt{z}$.

Question 2 : Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et $u_0 \in \mathbb{C}$. On considère la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par la formule de récurrence :

$$u_{k+1} = \frac{1}{2}\left(u_k + \frac{a}{u_k} \right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

a. On pose $v_k = \dfrac{u_k - \sqrt{a}}{u_k + \sqrt{a}}$. Exprimer v_k en fonction de v_{k-1} (si $k \in \mathbb{N}^*$), puis en fonction de v_0.

b. En déduire que $\lim_{k \to +\infty} u_k = \sqrt{a}$ si et seulement si u_0 appartient à un demi-plan ouvert, qu'on décrira avec précision, du plan complexe.

c. Lorsque $u_0 = 1$, montrer que $\lim_{k \to +\infty} u_k = \sqrt{a}$.

Question 3 : Soit $T \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure ($j < i \Rightarrow t_{ij} = 0$), telle que $t_{ii} \notin \mathbb{R}^-$, $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer qu'il existe une matrice $X \in M_n(\mathbb{C})$, triangulaire supérieure, telle que $\operatorname{Re} x_{ii} > 0$, $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$, et vérifiant $X^2 = T$.

Question 4 : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice vérifiant $\mathbb{R}^- \cap Sp(A) = \varnothing$.

Montrer qu'il existe $X \in M_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$Sp(X) \subset \{ z \in \mathbb{C} ; \ \operatorname{Re} z > 0 \}, \quad \text{et} \quad X^2 = A.$$

On admettra qu'une telle matrice est unique, et on la notera $\sqrt{A}$.

Tournez la page S. V. P.

Question 5 : On considère la matrice $B \in M_n(\mathbb{C})$ suivante :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Existe-t-il une matrice $X \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $X^2 = B$?

Deuxième partie

Dorénavant, et jusqu'à la fin du problème, A est une matrice fixée de $M_n(\mathbb{C})$, telle que :

$$\mathbb{R}^- \cap \mathrm{Sp}(A) = \varnothing .$$

Question 6 : Soit $X \in M_n(\mathbb{C})$, vérifiant :

$$(\lambda \in \mathrm{Sp}(X)) \Rightarrow (-\lambda \notin \mathrm{Sp}(X)) .$$

Montrer que l'application :

$$T_X : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C}),\ T_X(H) = HX + XH$$

est un isomorphisme (on se ramènera d'abord au cas où X est triangulaire).

Question 7 : Pour $X \in M_n(\mathbb{C})$, on définit $S(X) = X^2 - A$.

Écrire l'algorithme de Newton pour S, sous la forme $X_{k+1} = f(X_k)$. On exprimera $f(X)$ à l'aide de T_X.

Question 8 : Pour $M \in M_n(\mathbb{C})$, on définit :

$$\alpha(M) = \mathrm{Inf}\left\{ \frac{\| T_M H \|}{\| H \|};\ H \in M_n(\mathbb{C}),\ H \neq 0_n \right\}.$$

a. Vérifier que $\alpha(\sqrt{A}) > 0$.

b. Montrer l'inégalité :

$$\alpha(\sqrt{A})\, e_{k+1} \leqslant e_k^2 + 2\, e_k\, e_{k+1}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

où

$$e_k = \| X_k - \sqrt{A} \| .$$

c. En déduire que X_k tend vers $\sqrt{A}$ quand $k \longrightarrow +\infty$, pourvu que

$$\| X_0 - \sqrt{A} \| < \frac{1}{3}\, \alpha(\sqrt{A}) .$$

Question 9 : On suppose que A est diagonalisable, et on choisit $X_0 = I_n$. Étudier la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans les cas où elle est bien définie.

Troisième partie

On considère maintenant une matrice diagonale :

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^- .$$

On étudie une suite dans $M_n(\mathbb{C})$, définie par son premier élément Y_0 et la relation de récurrence :

$$Y_{k+1} = \frac{1}{2}\,(Y_k + Y_k^{-1} A),$$

tant que Y_k est inversible.

Tournez la page S. V. P.

page 46 E.N.S. de LYON
1987 Option Math-Mathématiques appliquées

Question 10 : Montrer que si $Y_0 = I_n$, alors $Y_k = X_k$, où $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la suite étudiée dans la deuxième partie du problème.

Dans ce cas, on a $\lim_{k \to +\infty} Y_k = \sqrt{A}$.

Pour $\Delta \in M_n(\mathbb{C})$, telle que $Y = \Delta + \sqrt{A}$ soit inversible, on pose

$$g(\Delta) = Y' - \sqrt{A}, \text{ où } Y' = \frac{1}{2}(Y + Y^{-1}A).$$

Question 11 :

a. Trouver un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que :

$$(\| \Delta \| < \varepsilon) \Rightarrow (\Delta + \sqrt{A} \text{ est inversible}).$$

b. Montrer que lorsque $\| \Delta \| \longrightarrow 0$:

$$g(\Delta) = \frac{1}{2}(\Delta - X^{-1}\Delta X) + \mathcal{O}(\| \Delta \|^2),$$

où $X = \sqrt{A}$.

Question 12 : On note L l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$:

$$\Delta \longrightarrow \frac{1}{2}(\Delta - X^{-1}\Delta X).$$

Montrer que :

$$\| L(\Delta) \| \leqslant \| \Delta \| . \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_j}} \right| .$$

Question 13 : On suppose que :

$$\max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_j}} \right| < 1.$$

a. Démontrer qu'il existe deux nombres réels $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon[$ et $k \in]0,1[$ tels que :

$$(\| \Delta \| < \varepsilon_1) \Rightarrow (\| g(\Delta) \| < k \| \Delta \|).$$

b. Prouver que si $\| Y_0 - \sqrt{A} \| < \varepsilon_1$, la suite $(Y_k)_{k \geqslant 0}$ est bien définie, et que

$$\lim_{k \to +\infty} Y_k = \sqrt{A}.$$

Question 14 : A-t-on $\lim_{k \to +\infty} Y_k = \sqrt{A}$, $\forall\, Y_0 \in M_n(\mathbb{C})$, pourvu que la suite $(Y_k)_{k \geqslant 0}$ soit bien définie ?

Question 15 : On suppose que $\frac{1}{2} \left| 1 - \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_j}} \right| \geqslant 1$, pour deux indices $1 \leqslant i, j \leqslant n$ convenables. On choisit : $Y_0 = \sqrt{A} + t_0 E$, où $t_0 \in \mathbb{R}^*$ et :

$$E = (e_{lm})_{\substack{1 \leqslant l \leqslant n \\ 1 \leqslant m \leqslant n}}, \quad e_{lm} = \begin{cases} 1 & \text{si } (l, m) = (j, i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Calculer Y_k et montrer que Y_k ne converge pas vers $\sqrt{A}$ quand $k \longrightarrow +\infty$.

E.N.S. de LYON
Option Math-Mathématiques appliquées
page 47
1987